数理解析研究所講究録 1367 巻 2004 年 48-58

The Painlevé Transcendental and the Self-dual Metrics

奥村昌司 (OKUMURA, Shoji)
大阪大学大学院理学研究科
(Graduate School of Science, Osaka University)

1 Introduction

(M,g) を 4 次元リーマン多様体とすると，リーマン曲率テンソルは以下のように分解される.

$$\begin{aligned}&\text{Riemann curvature tensor}_{(20)}\\&\quad=\text{Ricci}_{(10)}\oplus\text{Weyl}_{(10)}\\&\quad=\left\{\text{Scalar curvature}_{(1)}\oplus\text{Einstein}_{(9)}\right\}\oplus\left\{\text{SD Weyl}_{(5)}\oplus\text{ASD Weyl}_{(5)}\right\}.\end{aligned}$$

ただし，丸括弧内の数字は成分の数を表す.

DEFINITION 1.1 (M,g) が自己双対的であるとは，ワイル曲率の自己双対成分が零になる ($ASD\ Weyl=0$) ときにいう.

$SU(2)$ 対称な 4 次元リーマン計量についての自己双対方程式を考察する.

$$SU(2)\curvearrowright M=S^3\times\mathbb{R}$$

空間 M 上の群 $SU(2)$ による等長的な作用の軌道が S^3 となっている.

ヒッチン [5] は $SU(2)$ 不変な自己双対計量は (generic には)，2 つのパラメータを持つ $P_{VI}((\theta_0-1)^2/2,\bar{\theta}_0^2/2,-\theta_1^2/2,(1+\bar{\theta}_1^2)/2)$ の解によって特徴づけられることを示した (パラメータについては Appendix を参照).

この対応はツイスター対応 [2] を用いて説明される．ツイスター空間上に持ち上げられた群 $SU(2)$ の作用が (複素化されて) $SL(2,\mathbb{C})$ の pre-homogeneous な作用を定める．そして，この作用が $\mathbb{CP}^1$ 上のモノドロミー不変な接続の族を定める．こうして，パンルベ方程式が得られる.

この枠組みの中で，ヒッチン [5] は (対角的な) 自己双対計量を分類し，ダンサー [4] は対角的な scalar-flat Kähler 計量が $P_{III}(0,4,4,-4)$ の解によって特徴づけられることを示した.

対角的計量とは,

$$g = w_1 w_2 w_3\, dt^2 + \frac{w_2 w_3}{w_1}\sigma_1^2 + \frac{w_3 w_1}{w_2}\sigma_2^2 + \frac{w_1 w_2}{w_3}\sigma_3^2, \quad (w_i = w_i(t))$$

という形をした計量である. ここで, σ_i たちは $SU(2)$ 軌道上の 1 形式であり,

$$d\sigma_1 = \sigma_2 \wedge \sigma_3, \qquad d\sigma_2 = \sigma_3 \wedge \sigma_1, \qquad d\sigma_3 = \sigma_1 \wedge \sigma_2$$

を満たすものとする. ここで, σ_i たちは t に依存しないことに注意する. 対角的計量は一般の $SU(2)$ 普遍な計量

$$g = f(\tau)d\tau^2 + \sum_{l,m=1}^{3} h_{lm}(\tau)\,\sigma_l\,\sigma_m.$$

の特別な場合である. 自己双対アインシュタイン計量が対角的であることから, ヒッチンらの目的のためには対角的な場合だけを考察すれば十分であった. しかし, 非対角的な場合も含めた generic な計量について考察することも重要である. generic な場合について, ヒッチンは $P_{VI}\left((\theta_0-1)^2/2, \bar{\theta}_0^2/2, -\theta_1^2/2, (1+\bar{\theta}_1^2)/2\right)$ の解によって特徴づけられることを示したが, 具体的な計算は行っていない. ここでは, 対角的な計量のみならず, 非対角的な場合も考察する.

まずは正定値計量について, 自己双対方程式は P_{VI} または P_{III} に帰着し, scalar-flat Kähler 計量が P_{III} の解によって特徴づけられ [10, 11].

また, split した符合 $(+,+,-,-)$ を持つ場合には, P_{VI} や P_{III} のみならず, P_V や P_{II} も現れることを見る. ここで, パンルベ方程式の型の違いはツイスター空間上の実構造の違いから現れる.

複素化された計量については, I 型から VI 型までの全てのパンルベ方程式が (パラメータの条件もなしで) 現れる [9, 8]. しかしながら, 実計量についてどのようなパンルベ方程式が現れるのか調べ, パンルベ方程式の型や特殊解と, 計量の幾何学的構造との対応を調べることは重要である.

計量が対角的な場合には以下のことが知られている [11] :

1. $P_{\mathrm{VI}}(1/8, 1/8, -1/8, 5/8)$ の古典解であることと, Weyl 曲率が自己双対的かつ Ricci 曲率が 0 (すなわち Riemann 曲率テンソルが自己双対的) であることとは同値である.

2. $P_{\mathrm{VI}}(0, 1/2, -1/2, 1)$ の古典解であることと, 自己双対的な Weyl 構造 (g, D) をもつこととは同値である.

ここで Weyl 構造とは, 計量 g と, 計量と可換 $(Dg = \nu \otimes g)$ で捩率零な接続 D との組 (g, D) をいう.

ここでは, この結果を非対角的な場合にも拡張した例も紹介する.

2 対角型計量についての自己双対方程式

ここでは対角的な計量

$$g = w_1 w_2 w_3\, dt^2 + \frac{w_2 w_3}{w_1}\sigma_1^2 + \frac{w_3 w_1}{w_2}\sigma_2^2 + \frac{w_1 w_2}{w_3}\sigma_3^2. \tag{1}$$

このような対角型計量についての (scalar 曲率零の) 自己双対方程式は以下ように自励的な常微分方程式系になる [14]:

$$\begin{aligned}
\dot{w}_1 &= -w_2 w_3 + w_1(\alpha_2 + \alpha_3),\\
\dot{w}_2 &= -w_3 w_1 + w_2(\alpha_3 + \alpha_1),\\
\dot{w}_3 &= -w_1 w_2 + w_3(\alpha_1 + \alpha_2),\\
\dot{\alpha}_1 &= -\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3),\\
\dot{\alpha}_2 &= -\alpha_3\alpha_1 + \alpha_2(\alpha_3 + \alpha_1),\\
\dot{\alpha}_3 &= -\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2),
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで α_i たちは補助的に導入した関数であり，$\dot{} = d/dt$ であるとする．自己双対方程式 (2) は次のような第一積分を持つ：

$$k = \frac{\alpha_1(w_2^2 - w_3^2) + \alpha_2(w_3^2 - w_1^2) + \alpha_3(w_1^2 - w_2^2)}{8(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)}.$$

さらに,

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_3},\\
q &= \frac{w_2(\alpha_1 - \alpha_2)(w_2(w_1^2 - w_3^2) + 2\sqrt{2k}\, w_1 w_3(\alpha_1 - \alpha_3))}{w_1^2(w_2^2 - w_3^2)\alpha_1 + w_2^2(w_3^2 - w_1^2)\alpha_2 + w_3^2(w_1^2 - w_2^2)\alpha_3},
\end{aligned}$$

とおくと，$q(x)$ は $P_{VI}\left((\sqrt{2k}-1)^2/2, k, -k, (1+2k)/2\right)$ の解である．

以上では x が新しい独立変数として取れること，つまり $\frac{dx}{dt} \neq 0$ を仮定している．しかし，$\frac{dx}{dt} = 0$ の場合には，自己双対方程式は $P_{III}(0,4,4,-4)$ に帰着する [4].

REMARK 2.1 $\alpha_1 = w_1$, $\alpha_2 = w_2$, $\alpha_3 = w_3$ を仮定すると，自己双対方程式は $P_{VI}(1/8, 1/8, -1/8, 5/8)$ の古典解に帰着し，対応する計量はリッチ平坦な自己双対計量となる [*11*].

3 非対角的な自己双対方程式

$SU(2)$ 不変な計量は以下の形で表される：

$$g = f(\tau)d\tau^2 + \sum_{l,m=1}^{3} h_{lm}(\tau)\,\sigma_l\sigma_m. \tag{3}$$

このままの形で自己双対方程式を考えると，計算が膨大になってしまうので以下の形に書き換える [12]：

$$g = (abc)^2 dt^2 + a^2 d\hat{\sigma}_1^2 + b^2 \hat{\sigma}_2^2 + c^2 \hat{\sigma}_3^2,$$

ここで $t = t(\tau), a = a(t), b = b(t), c = c(t)$ であり，

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix},$$

ここで，$R(t)$ は $SO(3)$ 値である．

$\dot{R}R^{-1} \in \mathfrak{so}(3)$ であることから，

$$\begin{aligned} d\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix}^{\cdot} &= R(t) \begin{pmatrix} \sigma_2 \wedge \sigma_3 \\ \sigma_3 \wedge \sigma_1 \\ \sigma_2 \wedge \sigma_2 \end{pmatrix} + \dot{R} dt \wedge \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_2 \wedge \hat{\sigma}_3 \\ \hat{\sigma}_3 \wedge \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_1 \wedge \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{pmatrix} dt \wedge \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

と書ける $(\xi_1 = \xi_1(t), \xi_2 = \xi_2(t), \xi_3 = \xi_3(t))$.

$\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0$ の場合は計量は対角的となる．

以下では主に非対角的な場合を扱う．

まず，対角的な場合と同様に，$w_1 = bc, w_2 = ca, w_3 = ab$ とおき，α_i たちを

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -w_2 w_3 + w_1(\alpha_2 + \alpha_3), \\ \dot{w}_2 &= -w_3 w_1 + w_2(\alpha_3 + \alpha_1), \\ \dot{w}_3 &= -w_1 w_2 + w_3(\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned} \tag{4}$$

で定める．すると，(スカラー曲率零の) 自己双対方程式は以下の常微分方程式系となる [10, 11, 12]：

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 = -\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) &+ \frac{1}{4}(w_2^2 - w_3^2)^2 \left(\frac{\xi_1}{w_2 w_3}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{4}(w_3^2 - w_1^2)(3w_1^2 + w_3^2)\left(\frac{\xi_2}{w_3 w_1}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{4}(w_2^2 - w_1^2)(3w_1^2 + w_2^2)\left(\frac{\xi_3}{w_1 w_2}\right)^2, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_2 = -\alpha_3\alpha_1 + \alpha_2(\alpha_3+\alpha_1) &+ \frac{1}{4}(w_3^2-w_1^2)^2\left(\frac{\xi_2}{w_3w_1}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{4}(w_1^2-w_2^2)(3w_2^2+w_1^2)\left(\frac{\xi_3}{w_1w_2}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{4}(w_3^2-w_2^2)(3w_2^2+w_3^2)\left(\frac{\xi_1}{w_2w_3}\right)^2, \\
\dot{\alpha}_3 = -\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3(\alpha_1+\alpha_2) &+ \frac{1}{4}(w_1^2-w_2^2)^2\left(\frac{\xi_3}{w_1w_2}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{4}(w_2^2-w_3^2)(3w_3^2+w_2^2)\left(\frac{\xi_1}{w_2w_3}\right)^2 \\
&+ \frac{1}{4}(w_1^2-w_3^2)(3w_3^2+w_1^2)\left(\frac{\xi_2}{w_3w_1}\right)^2,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
(w_2^2-w_3^2)\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi_1}{w_2w_3}\right) &= \frac{\xi_2}{w_3w_1}\frac{\xi_3}{w_1w_2}(-2w_2^2w_3^2+w_3^2w_1^2+w_1^2w_2^2) \\
&\quad + \frac{\xi_1}{w_2w_3}(\alpha_2w_2^2-\alpha_3w_3^2+3\alpha_2w_3^2-3\alpha_3w_2^2), \\
(w_3^2-w_1^2)\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi_2}{w_3w_1}\right) &= \frac{\xi_3}{w_1w_2}\frac{\xi_1}{w_2w_3}(-2w_3^2w_1^2+w_1^2w_2^2+w_2^2w_3^2) \\
&\quad + \frac{\xi_2}{w_3w_1}(\alpha_3w_3^2-\alpha_1w_1^2+3\alpha_3w_1^2-3\alpha_1w_3^2), \\
(w_1^2-w_2^2)\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi_3}{w_1w_2}\right) &= \frac{\xi_1}{w_2w_3}\frac{\xi_2}{w_3w_1}(-2w_1^2w_2^2+w_2^2w_3^2+w_3^2w_1^2) \\
&\quad + \frac{\xi_3}{w_1w_2}(\alpha_1w_1^2-\alpha_2w_2^2+3\alpha_1w_2^2-3\alpha_2w_1^2).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

REMARK 3.1 $\xi_1=0$, $\xi_2=0$, $\xi_3=0$ と仮定すると，(4), (5), (6) は (2) となる．さらに，$\alpha_1=w_1$, $\alpha_2=w_2$, $\alpha_3=w_3$ とすると，*Atiyah-Hitchin* 計量 [*1*] の場合に帰着する．また，$\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$ とすると，オイラーのコマの方程式となり，*BGPP* 計量 [*3*] の場合になる．

REMARK 3.2 例えば $w_2=w_3$ を仮定すると，フレームの取り直しによって $\xi_1=0$, $\xi_2=0$, $\xi_3=0$ とすることができ，対角型計量の一種と考えられる．したがって，以下では $(w_2-w_3)(w_3-w_1)(w_1-w_2)\neq 0$ を仮定する．

4 モノドロミー保存変形

(M,g) を向き付けられた4次元リーマン多様体とする．Z を M 上の $\mathbb{CP}^1$ 束とし，Z 上に概複素構造を次の $(1,0)$ 形式によって定める：

$$\begin{aligned}\Theta_1 =& z(e^1+\sqrt{-1}e^2)-(e^0+\sqrt{-1}e^3),\\ \Theta_2 =& z(e^0-\sqrt{-1}e^3)+(e^1-\sqrt{-1}e^2),\\ \Theta_3 =& dz+\frac{1}{2}z^2(\omega_1^0-\omega_3^2+\sqrt{-1}(\omega_2^0-\omega_1^3))\\ &-\sqrt{-1}z(\omega_3^0-\omega_2^1)+\frac{1}{2}(\omega_1^0-\omega_3^2-\sqrt{-1}(\omega_2^0-\omega_1^3)).\end{aligned}$$

ここで

$$g=(e^0)^2+(e^1)^2+(e^2)^2+(e^3)^2$$

であり，ω_j^i は $de^i+\omega_j^i\wedge e^j=0$ と $\omega_j^i+\omega_i^j=0$ で定められるリーマン接続である．すると (M,g) が自己双対的であることと以下とが同値になる [2]:

$$d\Theta_1\equiv 0,\qquad d\Theta_2\equiv 0,\qquad d\Theta_3\equiv 0\qquad (\mathrm{mod}\ \Theta_1,\Theta_2,\Theta_3).$$

Theorem 4.1 計量が正定値なら，*Pfaff* 系

$$\Theta_1=0,\quad \Theta_2=0,\quad \Theta_3=0$$

は複素共役の作用と $z\mapsto -1/\bar{z}$ によって不変である [2]．計量の符合が $(+,+,-,-)$ なら，*Pfaff* 系は複素共役の作用と $z\mapsto \bar{z}$ によって不変である．

Remark 4.2 $TM^{\mathbb{C}}$ を M の接空間の複素化とする．$\mathscr{C}=\{a\in TM^{\mathbb{C}}\mid g(a,a)=0\}$ を *null cone* という．*null cone* の元 $a\in TM^{\mathbb{C}}$ に対し，

$$\Theta_1(a+\lambda\frac{\partial}{\partial z})=0,\qquad \Theta_2(a+\lambda\frac{\partial}{\partial z})=0,\qquad \Theta_3(a+\lambda\frac{\partial}{\partial z})=0, \tag{7}$$

を λ,z についての代数的方程式と考えよう．すると方程式 (7) が解 $\lambda\in\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{CP}^1$ をもつ必要十分条件は $a\in\mathscr{C}$ である．

計量が $SU(2)$ 不変であるとき，以下のように表すことができる：

$$\begin{pmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\\ \Theta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}dz+\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}dt+A\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{pmatrix}, \tag{8}$$

$v_i=v_i(z,t), A=\left(a_{ij}(z,t)\right)$ (それぞれ z に関して有理式).

ここで，$\det A\equiv 0$ の場合には，計量は対角型になり，BGPP 計量 [3] となる．

以下では $\det A \neq 0$ の場合を考える．すると，

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \equiv -A^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} dt\right), \quad (\mathrm{mod}\ \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \tag{9}$$

と表せる．右辺を

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} := -A^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} dt\right), \tag{10}$$

とおくと，

$$d\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} s_2 \wedge s_3 \\ s_3 \wedge s_1 \\ s_1 \wedge s_2 \end{pmatrix}, \quad (\mathrm{mod}\ \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \tag{11}$$

であるが，s_1, s_2, s_3 が (z,t) 平面上の 1 形式であることから，合同式であった (11) が単なる等式になる：

$$d\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_2 \wedge s_3 \\ s_3 \wedge s_1 \\ s_1 \wedge s_2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

ここで，

$$\Sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{-1}s_2 & -s_1 + \sqrt{-1}s_3 \\ s_1 + \sqrt{-1}s_3 & -\sqrt{-1}s_2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$=: -B_1\,dz - B_2\,dt, \tag{14}$$

と置くと，

$$d\Sigma + \Sigma \wedge \Sigma = 0 \tag{15}$$

が成り立つ．これは以下の線形問題のモノドロミー保存条件である [6]：

$$\left(\frac{d}{dz} - B_1\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{16}$$

Lemma 4.3 B_1 の成分は z の有理関数であり，

$$B_1 = \frac{F(z)}{G(z)},$$

分子の $F(z)$ は 2 次で，分母の $G(z)$ は 4 次となる．さらに，計量が正定値の場合は，複素共役の作用と $z \mapsto -1/\bar{z}$ によって，$B_1 \mapsto -{}^t\bar{B}_1$ となる．

こうして B_1 は (generic には) 4 つの 1 位の極を持ち，線形問題 (16) の変形方程式はパンルベ VI 型方程式となる．

lemma 4.3 より，B_1 の極は対蹠点のペアをなす：$\zeta_0, -1/\bar{\zeta}_0, \zeta_1, -1/\bar{\zeta}_1 \in \mathbb{CP}^1$．従って，$B_1$ の極の配置によって以下のように分類される：

(a) B_1 が 4 つの 1 位の極 $\zeta_0, -1/\bar{\zeta}_0, \zeta_1, -1/\bar{\zeta}_1$ を持つ場合．

$$B_1 = \frac{A_0}{z-\zeta_0} + \frac{-{}^t\bar{A}_0}{z+1/\bar{\zeta}_0} + \frac{A_1}{z-\zeta_1} + \frac{-{}^t\bar{A}_1}{z+1/\bar{\zeta}_1},$$

変形方程式は

$$P_{VI}\left(\frac{1}{2}(\theta_0-1)^2, \frac{1}{2}\bar{\theta}_0^2, -\frac{1}{2}\theta_1^2, \frac{1}{2}(1+\bar{\theta}_1^2)\right),$$

となり，$\theta_0^2 = 2\,\mathrm{tr}A_0^2$, $\theta_1^2 = 2\,\mathrm{tr}A_1^2$.

(b) B_1 が 2 つの 2 位の極 $\zeta, -1/\bar{\zeta}$ を持つ場合．

$$B_1 = \frac{A_2}{(z-\zeta)^2} + \frac{\sqrt{-1}C}{z-\zeta} + \frac{-\sqrt{-1}C}{z+1/\bar{\zeta}} + \frac{-{}^t\bar{A}_2/\bar{\zeta}^2}{(z+1/\bar{\zeta})^2},$$

ここで，$C = -{}^t\bar{C}$. 変形方程式は

$$P_{III}\left(4\theta, 4(1+\bar{\theta}), 4, -4\right),$$

となり，$\theta^2 = 2(\mathrm{tr}(A_2C))^2/\mathrm{tr}C^2$.

REMARK 4.4 対角型の *scalar-flat Kähler* 計量が $P_{III}(0,4,4,-4)$ になることが知られていたが [4]，上記 (b) は，その一般化である．

自己双対方程式からパンルベ方程式を導くだけでなく，Remark 4.2 より，パンルベ方程式に対応する線形問題から計量を再構成することもできる．

Theorem 4.5 B_1 と B_2 から以下のようにして零曲面 $\mathscr{C}$ を構成できる：
複素化された M の接ベクトル

$$a_0\frac{\partial}{\partial t} + a_1\sigma_1^* + a_2\sigma_2^* + a_3\sigma_3^* \in TM^{\mathbb{C}},$$

に対し，

$$\begin{aligned}\tfrac{a_1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \tfrac{a_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}\end{pmatrix} + \tfrac{a_3}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}\\ \sqrt{-1} & 0\end{pmatrix} \\ = -\lambda B_1(z) - a_0 B_2(z)\end{aligned} \tag{17}$$

を λ, z を未知数とする代数方程式と考える．すると，方程式 (17) が解 $\lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{CP}^1$ をもつのは，

$$a_0\frac{\partial}{\partial t} + a_1\sigma_1^* + a_2\sigma_2^* + a_3\sigma_3^* \in \mathscr{C}$$

のときであり，そのときに限る．

ここで特別な場合として$\xi_2=\xi_3=0$のときを考える．そのとき，等長的な作用

$$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\mapsto(\sigma_1,-\sigma_2,-\sigma_3), \tag{18}$$

が存在して，$SU(2)$ のそれぞれの軌道を保つ．したがって，(18) と $z\mapsto\bar{z}$ の変換を行うと，

$$\begin{pmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\\ \Theta_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\bar{\Theta}_1\\ \bar{\Theta}_2\\ \bar{\Theta}_3\end{pmatrix}$$

となる．したがって，

$$\left.\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix}\right|_{z\mapsto\bar{z}}=\begin{pmatrix}\bar{s}_1\\ -\bar{s}_2\\ -\bar{s}_3\end{pmatrix},$$

であり，$B_1|_{z\mapsto\bar{z}}=\bar{B}_1$ が得られる．先ほどの分類に当てはめると以下のようになる：

(a) $\theta_0^2=2\,\mathrm{tr}A_0^2\in\mathbb{R}$ かつ $\theta_1^2=2\,\mathrm{tr}A_1^2\in\mathbb{R}$,
　または
　$\theta_0^2=\theta_1^2=2\,\mathrm{tr}A_0^2=2\,\mathrm{tr}A_1^2\in\mathbb{C}$.

(b) $\theta^2=2(\mathrm{tr}(A_2C))^2/\mathrm{tr}A_2^2\in\mathbb{R}$.

5 パンルベ方程式の古典解と幾何学構造

ここでは，パンルベ方程式の古典解と対応する幾何学的構造に関して，いくつかの例をあげる．

記号の簡単のために次のようにおく：

$$X_1:=\frac{w_2^2-w_3^2}{w_2w_3}\xi_1,\quad X_2:=\frac{w_3^2-w_1^2}{w_3w_1}\xi_2,\quad X_3:=\frac{w_1^2-w_2^2}{w_1w_2}\xi_3.$$

すると，

Theorem 5.1 [*12*] 自己双対計量が *scalar-flat Kähler*（すなわち対応するパンルベ方程式が *III* 型である）ための必要十分条件は，

$$X_1^2=4\alpha_2\alpha_3,\ X_2^2=4\alpha_3\alpha_1,\ X_3^2=4\alpha_1\alpha_2.$$

が成り立つことである．

Example 5.2 以下のように置くと，$P_{III}(4,8,4,-4)$ の古典解が対応する：

$$\alpha_1=0,\qquad \alpha_2=\frac{(w_1-w_2)(w_2-w_3)}{w_2+w_3},\qquad \alpha_3=-\frac{(w_2-w_3)(w_1+w_3)}{w_2+w_3}.$$

そしてこのとき，自己双対的なワイル構造 (D,g) が存在する．

Example 5.3 以下のようにおくと，$\in P_{VI}$ の古典解が対応する：

$$\alpha_1 = \frac{w_1 w_2 - w_1 w_3 - w_3 \alpha_2 + w_2 \alpha_3}{w_2 - w_3},$$
$$X_1^2 = (w_2 - w_3)^2 - (\alpha_2 - \alpha_3)^2, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0$$

そしてこのとき，自己双対的なワイル構造 (g, D) が存在する．

ここでさらに $\alpha_2 = w_2$, $\alpha_3 = w_3$ を仮定すると，$\alpha_1 = w_1$ となり，BGPP 計量 (対角的な自己双対リッチ平坦計量) になる．

Appendix

パンルベ方程式とは動く分岐点を持たない 2 階の非線形常微分方程式である．この章では Painlevé と Gambier によって分類された 6 つの方程式をリストする [13]．ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はパラメータである．

1. Painlevé I
$$\frac{d^2q}{dx^2} = 6q^2 + x.$$
2. Painlevé II
$$\frac{d^2q}{dx^2} = 2q^3 + xq + \alpha.$$
3. Painlevé III
$$\frac{d^2q}{dx^2} = \frac{1}{q}\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 - \frac{1}{x}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{x}(\alpha q^2 + \beta) + \gamma q^3 + \frac{\delta}{q}.$$
4. Painlevé IV
$$\frac{d^2q}{dx^2} = \frac{1}{2q}\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 + \frac{3}{2}q^3 + 4xq^2 + 2(x^2 - \alpha)q + \frac{\beta}{q}.$$
5. Painlevé V
$$\frac{d^2q}{dx^2} = \left(\frac{1}{2q} + \frac{1}{q-1}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 - \frac{1}{x}\frac{dq}{dx} + \frac{(q-1)^2}{x^2}\left(\alpha q + \frac{\beta}{q}\right) + \frac{\gamma q}{x} + \frac{\delta q(q+1)}{q-1}.$$
6. Painlevé VI
$$\frac{d^2q}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-x}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{q-x}\right)\frac{dq}{dx}$$
$$+ \frac{q(q-1)(q-x)}{x^2(x-1)^2}\left\{\alpha + \beta\frac{x}{q^2} + \gamma\frac{x-1}{(q-1)^2} + \delta\frac{x(x-1)}{(q-x)^2}\right\}.$$

参考文献

[1] Atiyah, M. F. and Hitchin, N. J.: Low energy scattering of non-Abelian monopoles, Phys. Lett. A **107** (1985), 21–25

[2] Atiyah, M. F., Hitchin, N. J. and Singer, I. M.: Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, Proc. Roy. Soc, London Ser. A **362** (1978) 425–461

[3] Belinski, V. A., Gibbons, G. W., Page, D. W. and Pope, C. N.: Asymptotically Euclidean Bianchi IX metrics in quantum gravity, Phys. Lett. B **76** (1978),433–435

[4] Dancer, A. S.: Scalar-flat Kähler metrics with $SU(2)$ symmetry, J.reine. angew. Math. **479** (1996), 99–120

[5] Hitchin, N. J.: Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations, J. Differential Geom. **42** (1995), 30–112

[6] Jimbo, M., Miwa, T. and Ueno, K.: Monodromy Preserving Deformation of Linear Ordinary Differential Equations with Rational Coefficients. I, Physica **2D** (1981), 306–352

[7] Jimbo, M. and Miwa, T.: Monodromy Preserving Deformation of Linear Ordinary Differential Equations with Rational Coefficients. II, Physica **2D** (1981), 407–448

[8] Maszczyk, R.: The symmetry transformation in self-duality, Class. Qantum Grav. **12** (1995), 421–433

[9] Maszczyk, R., Mason, L. J. and Woodhouse, N. M. J.: Self-dual Bianchi metrics and the Painlevé transcendents, Classical Quantum Gravity **11** (1994), 65–71

[10] Okumura, S.: Painlevé analysis on Self-dual equation (in Japanese), RIMS Kokyuroku **1212** (2001), 32–42

[11] Okumura, S.: Anti-Self-Dual Hermitian Metrics and Painlevé III, Osaka J. Math. (to be published)

[12] Okumura, S.: The indefinite anti-self-dual metrics and the Painlevé equations, J. Math. Phys. **44** (2003), 4828–4838

[13] Painlevé, P.: Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes, C. R. Acad. Sci. Paris **143** (1906), 1111–1117

[14] Tod, K. P.: Self-dual Einstein metrics from the Painlevé VI equation, Phys. Lett. A **190** (1994), 221–224